ТЕМА 6 ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с закрепленными концами траекторий и фиксированными начальным и конечным моментами времени

Рассмотрим задачу оптимального управления с закрепленными концами траекторий и фиксированным временем (соответствующие терминология и обозначения введены в п. 1.3).

Требуется минимизировать функционал

$$J(u(t))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt \to \inf \tag{6.1}$$

для системы

$$\dot{x}(t)= f(x(t),u(t),t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{6.2}$$

при условиях

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{6.3}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \tag{6.4}$$

где $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ – фазовые координаты, $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ – управления, которые считаются кусочно-непрерывными функциями на интервале $[t_0,t_1]$, моменты времени t_0,t_1 и точки x_0,x_1 – заданы, множество $V \subseteq E^r$ (E^r – Евклидово r- мерное пространство) не зависит от времени, фазовые ограничения для $t \in [t_0,t_1]$ отсутствуют, $f(x(t),u(t),t) = (f^1(x(t),u(t),t),\ldots, f^n(x(t),u(t),t))^T$. Отметим также, что для функций $f(*)$ верхний параметр означает не степень, а номер элемента в вектор-строке (столбце).

Важно подчеркнуть, что кусочно-непрерывные управления в точках разрыва не влияют на решение уравнения (6.2) (согласно определению 1.1.) и на значение интеграла (6.1), а значит, и на задачу (6.1) – (6.4). Поэтому в точках разрыва управления можно доопределить произвольно, чтобы не нарушалось ограничения $u(t) \in V,\ t_0 \le t \le t_1$.

Для формальной постановки задачи введем некоторые обозначения и будем считать выполненными занные выше предположения. Зависимость от t и других аргументов в формулах, где это не будет вызывать недоразумений, будем опускать. Считаем, что $u(t) = u(t+0) = \lim\limits_{t \to t+0} u(t)$ при $t_0 \le t \le t_1$ та $u(t_1) = u(t_1 - 0)$.

Предположим, что функции $f^j(x(t),u(t),t)$, $j = \overline{0,n}$ имеют частные производные (для упрощения записей аргументы функций будем опускать в тех случаях, которые не вызывают недоразумений):

$$\frac{\partial f^j(x(t),u(t),t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^j}{\partial x_i} = f^j_{x_i}, \ i = \overline{1,n}.$$

Аналогично обозначим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f^n_{x_1} & \cdots & f^n_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_x \\ \vdots \\ f^n_x \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} = f^0_x = (f^0_{x_1}, \quad \ldots, \quad f^0_{x_n})^T. \tag{6.5}$$

Считаем: функции $f^j(x(t),u(t),t)$, $j = \overline{0,n}$ и частные производные f_x, f^0_x из формул (6.5) – непрерывные по совокупности аргументов $(x,u,t) \in E^n \times E^r \times [t_0,t_1]$.

Далее, введем n вспомогательных переменных $\psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))^T \in E^n$ и постоянную ψ_0. Для этих переменных и постоянной определим функцию:

$$\begin{aligned} &H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi_1(t) f^1(x(t),u(t),t) + \\ &+ \ldots + \psi_n(t) f^n(x(t),u(t),t) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t) f(x(t),u(t),t). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Функция $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ называется **функцией Гамильтона - Понтрягина.**

Пусть $u=u(t)$ – кусочно-непрерывное управление, удовлетворяющее условию (6.4), а $x(t)=x(t,u,x_0)$ – решение системы (6.2), что соответствует этому управлению $u(t)$, начальному условию x_0 и определено на всем интервале $[t_0,t_1]$.

Паре $(u(t),x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ поставим в соответствие систему линейных дифференциальных уравнений относительно переменных $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)}{\partial x_i}\right|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} = \tag{6.7}$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \left.\frac{\partial f^j(x(t),u(t),t)}{\partial x_i}\right|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}}, i=\overline{1,n},$$

где $\psi_0(t)=\psi_0$ – постоянная величина.

Систему линейных дифференциальных уравнений (6.7) называют **сопряженной системой**, соответствующей паре $(u(t),x(t,u,x_0))$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишем систему (6.7) в векторной форме:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H_x(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\Big|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} =$$

$$= -\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t) - (f_x(x(t),u(t),t)^T \psi(t),$$

для всех $t_0 \le t \le t_1$.

Теорема 6.1. (Принцип максимума – необходимое условие оптимальности. Закрепленные концы траекторий, начальный и конечный моменты времени фиксированные).

Пусть $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – решение задачи (6.1) – (6.4).

Тогда необходимо существует непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ и постоянная ψ_0 такие,что:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ является решением сопряженной системы (6.7), которая соответсвтует решениям $(u(t), x(t))$;

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона-Понтрягина $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ как функция переменной $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ достигает своей верхней грани на множестве V при $u = u(t)$, то есть:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) . \qquad (6.9)$$

Центральное место в теореме 6.1 занимает условие максимума. Поэтому теорему 6.1 и последующие аналогичные теоремы принято называть принципом максимума. Условие (6.8) гарантирует, что функция не превратится в тождественный ноль и делает условие максимума (6.9) содержательным.

Как пользоваться теоремой 6.1 на практике?

Находят функцию $u = u(x, t, \psi, \psi_0)$, что дает $\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$. При этом переменные x, t, ψ и постоянная ψ_0 считаются параметрами.

Отметим, что

$$u = u(x, t, \psi, \psi_0) \in V . \qquad (6.10).$$

Если начальная задача (6.1) – (6.4) имеет решение, то функция (6.10) определена на непустом множестве, что следует из условия максимума (6.9).

Далее составляют систему с $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x,t,\psi,\psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases} \qquad (6.11)$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$ относительно неизвестных функций $x(t), \psi(t)$.

Общее решение системы (6.11) содержит $2n$ произвольных постоянных. Для их определения необходимо иметь $2n$ условий. В задачи (6.1) – (6.4) эти условия таковы: $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Система (6.11) содержит еще один неизвестный параметр $\psi_0 \le 0$. Как его найти? Заметим, что функция $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$, которая определяется соотношением (6.6), линейная и однородная относительно переменных $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$, то есть $H(x(t), u(t), t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) = \alpha H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$ для $\forall \alpha$.

Отсюда и из условия

$$\begin{aligned} &H(x(t), u(x,t,\psi(t),\psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \\ &= \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \end{aligned} \qquad (6.12)$$

имеем

$$u(x,t,\alpha\psi(t),\alpha\psi_0) \equiv u(x,t,\psi(t),\psi_0) \qquad (6.13)$$

для $\forall \alpha$.

Отсюда следует, что теорема 6.1 определяет $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ только с точностью до положительного множителя, и этим множителем можно воспользоваться по своему усмотрению.

На практике, учитывая условия теоремы 6.1, в частности, ограничения (6.8), чаще всего полагают

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \psi_0 \le 0, \qquad (6.14)$$

где $\bar{t}$ – некоторый момент времени, $t_0 \le \bar{t} \le t_1$, например, $\bar{t} = t_0$ или

$\bar{t} = t_1$.

В тех задачах, в которых удается заранее показать, что $\psi_0 < 0$, вместо условия нормирования (6.14) часто полагают, что $\psi_0 = -1$.

То есть для определения $2n+1$ неизвестных параметров системы (6.11) ($2n$ постоянных из общего решению этой системы плюс параметр ψ_0) имеем $2n+1$ условий (6.3), (6.14). Как правило, можно ожидать, что существуют только отдельные изолированные функции $x(t), \psi(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ и значение ψ_0, удовлетворяющих условиям (6.11), (6.3), (6.14).

Краевую задачу, состоящую из условия максимума (6.12), системы дифференциальных уравнений (6.11), краевых условий (6.3) и условия нормирования (6.14), называют краевой задачей принципа максимума для задачи оптимального управления (6.1) – (6.4).

Пусть удалось определить из условий (6.11), (6.3), (6.14) некоторые $x(t), \psi(t), \psi_0$, $t_0 \le t \le t_1$. Подставим их в (6.10) и получим функцию:

$$u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0) \in V, \ t_0 \le t \le t_1. \tag{6.15}$$

Пусть эта функция оказалась кусочно-непрерывной функцией. Из (6.10), (6.12), (6.15) следует, что полученное управление $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ удовлетворяет условию максимума (6.9), то есть согласно теореме 6.1 может претендовать на роль оптимального управления задачи (6.1) – (6.4), а соответствующая ему траектория $x(t) = x(t, u(t), x_0)$, $t_0 \le t \le t_1$ – на роль оптимальной траектории этой задачи. То есть они являются решением, подходящим под оптимальное. Будет ли найдена пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ являться на самом деле решением задачи (6.1) – (6.4), то есть оптимальным решением, теорема 6.1 не гарантирует, поскольку эта теорема дает лишь необходимое условие оптимальности. Может быть, что пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ удовлетворяет условиям теоремы 6.1, но не является решением задачи (6.1)–(6.4).

Впрочем, если по каким-то соображениям известно (как правило, из физического смысла задачи), что данная задача (6.1) – (6.4) имеет решение, а из краевой задачи принципа максимума найдены $x(t), \psi(t), \psi_0, t_0 \le t \le t_1$ однозначно, то найденное управления (6.15) и будет оптимальным. Если же информации о существования решения задачи (6.1) – (6.4) заранее нет, либо краевой задачи принципа максимума удовлетворяет несколько найденных управлений, подозрительных на оптимальное, то для выяснения вопроса об их оптимальности нужны дополнительные и порой довольно сложные исследования.

Итак, схема использования принципа максимума описана.

6.2. Принцип максимума для задач со свободными или подвижными концами траекторий и фиксированным временем

Рассмотрим задачу оптимального управления с более общими условиями на концах траекторий; начальный и конечный моменты времени, как и раньше, фиксированные:

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_1)) \to \inf, \qquad (6.16)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.17)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \qquad (6.18)$$

$$u(t) \in V, \ t_0 \le t \le t_1, \qquad (6.19)$$

где управление $u(t)$ – кусочно-непрерывные на $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$; начальный и конечный моменты времени t_0, t_1 – фиксированные; $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Считаем, что правый конец траектории или свободный: $S_I \equiv E^n$, или подвижный

$$S_I = \{x \in E^n : g_j(x) = 0, \ j = \overline{1, s_I}\}, \qquad (6.20)$$

или удовлетворяет условиям:

$$S_I = \{x \in E^n : g_j(x) \le 0,\ j = \overline{1, m_I},\ g_j(x) = 0,\ j = \overline{m_I + 1, s_I}\},\ (6.21)$$

В частности, если в условии (6.20) положим: $g_j(x) = x_j - x_{jI}$ и $s_I = n$, то получим случай закрепленного правого конца: $x(t_1) = x_I$.

Аналогично для левого конца. Считаем, что левый конец траекторий или свободный: $S_0 \equiv E^n$, или подвижный:

$$S_I = \{x \in E^n : h_j(x) = 0,\ j = \overline{1, s_0}\}, \qquad (6.22)$$

Или выбирается из условий:

$$S_0 = \{x \in E^n : h_j(x) \le 0,\ j = \overline{1, m_0}, h_j(x) = 0,\ j = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \quad (6.23)$$

Далее будем считать: функции $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$, $g_j(x), j = \overline{1, s_I}$, $h_j(x), j = \overline{1, s_0}$, $\Phi(x)$ имеют частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и непрерывные вместе с этими производными по совокупности своих аргументов при всех $x \in E^n$, $u(t) \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

Также обозначим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x = (\Phi_{x_1}, \ldots, \Phi_{x_n})^T,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x} = g_{j_x} = (g_{j_{x_1}}, \ldots, g_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_I},$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x} = h_{j_x} = (h_{j_{x_1}}, \ldots, h_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_0}.$$

Теорема 6.2 (Принцип максимума – необходимое условие оптимальности. Концы траекторий не закреплены – свободные или подвижные, начальный и конечный моменты времени фиксированные).

Пусть $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – решение задачи (6.16)–(6.19).

Тогда необходимо существует непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ и постоянная ψ_0 такие, что:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ является решением сопряженной системы (6.7), которая отвечает решению $(u(t), x(t))$, который рассматривается;

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона - Понтрягина $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ как функция переменной $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ достигает своей верхней грани на множестве V при $u = u(t)$, то есть:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)\ .(6.9)$$

4) на левом и правом концах траектории $x(t)$ выполняются условия трансверсальности, которые в случае задачи (6.16) – (6.19) означают, что вектор $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ ортогональный множеству S_I в точке $x(t_1) \in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ ортогональный множеству S_0 в точке $x(t_0) \in S_0$.

Если $u(t)$ ограничена измеримой функцией, то формулировка теоремы 6.2 сохраняется, только условие максимума вида (6.9) и включение (6.19) будут выполняться почти везде на $[t_0, t_1]$.

Заметим, что условие (6.13) однородности функции $u(t)$ сохраняет силу и в этой задаче, а свойство ортогональности вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ множеству S_I и вектора $\psi(t_0)$ множеству S_0 не нарушится, если величины $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ умножить на одно и то же число $\alpha > 0$.

Поэтому и здесь можно принять условие нормирования (6.14), или условие $\psi_0 = -1$, если известно, что $\psi_0 < 0$.

Еще надо указать $2n$ условий для определения $2n$ постоянных, от которых будет зависеть общее решение системы (6.11). Для этого рассмотрим условия трансверсальности на концах траектории $x(t)$.

Приведем эти условия на правом конце траектории.

1) Правый конец свободный: $S_I \equiv E^n$.

Тогда условие ортогональности вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ ко всему пространству E^n означает:

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=0\,. \qquad (6.24)$$

Это дает n граничных условий для системы (6.11).

2) Правый конец подвижный:

а) Пусть множество S_I задается в виде (6.20) и $g_{j_x}(x(t_1))\neq 0,\ j=\overline{1,s_I},$.

Тогда гиперплоскость

$$g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0$$

– это касательная плоскость к поверхности, которая определяется уравнением $g_j(x)=0$ в точке $x(t_1)$, а множество

$$\Gamma=\{x\in E^n : g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0,\ j=\overline{1,s_I}\}$$

– касательная плоскость к множеству S_I в точке $x(t_1)$.

Условие ортогональности вектора a к множеству S_I в точке $x(t_1)$ означает ортогональность a к касательной плоскости Γ, то есть скалярное произведение $(a, x-x(t_1))=0$ при $\forall x\in\Gamma$ – по определению.

Тогда из условия трансверсальности имеем:

$$(\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1)))^T(x-x(t_1))=0$$

для всех x : $g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0,\ j=\overline{1,s_I}$.

По теореме Фаркаша [5] существуют числа $a_1,\ldots,a_{s_I}$ такие, что

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=\sum_{j=1}^{s_I}a_j g_{j_x}(x(t_1))\,. \qquad (6.25)$$

Сюда же добавим условие $x(t_1)\in S_I$, то есть:

$$g_j(x(t_1))=0,\ j=\overline{1,s_I}\,. \qquad (6.26)$$

Всего условия трансверсальности (6.25), (6.26) дают $n+s_I$ условий, из которых s_I условий можно использовать для определения дополнительных параметров $a_1,\ldots,a_{s_I}$, а остальные n условий – присоединить к системе (6.11).

б) пусть множество S_I задается в виде (6.21) и $g_{j_x}(x(t_1)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_I},$. Тогда условие трансверсальности означает, что существуют числа $a_1, \ldots, a_{s_I}$:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1)) = \sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1)), \tag{6.27}$$

$$a_j g_j(x(t_1)) = 0, a_j \geq 0,\ j = \overline{1, m_I}\ , g_j(x(t_1)) = 0,\ j = \overline{m_I + 1, s_I}\ . \tag{6.28}$$

Таким образом, соотношение (6.27), (6.28) также дают $n + s_I$ условий, из которых s_I условий используется для определения параметров $a_1, \ldots, a_{s_I}$, а остальные n условий присоединяются к системе (6.11). Заметим, что для всех $j, 1 \leq j \leq m_I$, для которых $g_j(x(t_1)) < 0$ (неактивные ограничения), с (6.28) следует, что $a_j = 0$. Тогда неопределенными остаются только a_j с индексами j, для которыхх $g_j(x(t_1)) = 0$ (активные ограничения).

3) Правый конец закреплен:

$$x(t_1) = x_I\ . \tag{6.29}$$

Тогда условие трансверсальности можно рассматривать как условие ортогональности вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ вектору нулевой длины – то есть к точке x_I. Это всегда тривиально выполняется. Значит, в случае закрепленного конца условие трансверсальности вырождается и не несет в себе никакой информации.

В этом случае имеем n граничных условий, которые нужно присоединить к системе (6.11).

Рассмотрим условия трансверсальности на левом конце траектории $x(t)$.

1) Левый конец свободный: $S_0 \equiv E^n$.

Тогда условие трансверсальности записывается так:

$$\psi(t_0) = 0\ . \tag{6.30}$$

2) Левый конец подвижной.

Если множество S_0 имеет вид (6.22) и $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_0}$, то условие трансверсальности запишется в следующим образом: существуют числа $b_1, \dots, b_{s_0}$ такие, что

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \tag{6.31}$$

и к (6.31) следует добавить условие $x(t_0) \in S_0$, что означает:

$$h_j(x(t_0)) = 0,\ j = \overline{1, s_0}. \tag{6.32}$$

Если множество S_0 имеет вид (6.23) и $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_0}$, то условие трансверсальности:

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \tag{6.33}$$

и к (6.31) следует добавить условие $x(t_0) \in S_0$, что означает:

$$b_j h_j(x(t_0)) = 0,\ b_j \geq 0,\ j = \overline{1, m_0}, \tag{6.34}$$

$$h_j(x(t_0)) = 0,\ j = \overline{m_0 + 1, s_0}.$$

3) Левый конец закреплен:

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.35}$$

Условие трансверсальности тривиально выполняется.

Соотношение (6.30) – (6.35) дают n граничных условий для системы (6.11).

6.3. Принцип максимума для задачи оптимального управления с неизвестными начальным и конечным моментами времени

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой начальный и конечный моменты времени неизвестные и подлежат определению:

$$J(t_0, t_1, x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\,dt + \Phi(x(t_1), t_1) \to \inf, \tag{6.36}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{6.37}$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \tag{6.38}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1 \tag{6.39}$$

где управление $u(t)$ – кусочно-непрерывные на $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$; начальный и конечный моменты времени неизвестны; $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$.

Задача (6.36) – (6.39) – частный случай общей задачи оптимального управления (1.28) – (1.32).

Считаем, что правый конец траекторий или свободный:

$$S_I(t_1) \equiv E^n, \ t_1 \in R,$$

или подвижный:

$$\begin{aligned} S_I(t_1) = \{x \in E^n : g_j(x, t_1) \le 0, \ j = \overline{1, m_I}, \\ g_j(x, t_1) = 0, \ j = \overline{m_I + 1, s_I}\}, t_1 \in R. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Аналогично считаем, что левый конец траекторий или свободный:

$$S_0(t_0) \equiv E^n, \ t_0 \in R,$$

или подвижный:

$$\begin{aligned} S_0(t_0) = \{x \in E^n : h_j(x, t_0) \le 0, \ j = \overline{1, m_0}, \\ h_j(x, t_0) = 0, \ j = \overline{m_0 + 1, s_0}\}, t_0 \in R. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Отметим, что случаи $m_I = 0$ або $s_I = m_I$, а также $m_0 = 0$ или $s_0 = m_0$ в (6.40), (6.41) не исключаются.

Пусть функции $f^j(x, u, t), \ j = \overline{0, n}$, и их частные производные $f_x^j(x, u, t), \ j = \overline{0, n}$, – непрерывные по совокупности аргументов $(x, u, t) \in E^n \times V \times R$, а функции $\Phi(x, t), g_j(x, t), \ j = \overline{1, s_I}$, $h_j(x, t), j = \overline{1, s_0}$ и их частные производные по x и t –

$\Phi_x, \Phi_t, g_{j_x}, g_{j_t}, h_{j_x}, h_{j_t}$ – непрерывные по совокупности $(x,t) \in E^n \times R$.

Теорема 6.3 (Принцип максимума – необходимое условие оптимальности. Концы траекторий – или свободные, или подвижные, или закреплены. Начальный и конечный моменты времени неизвестные и подлежат определению).

Пусть набор $(t_0, t_1, u(t), x(t))$ является решением задачи (6.36) – (6.39).

Тогда необходимо существует непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ и постоянная ψ_0 такие, что:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$;(6.8)

2) $\psi(t)$ является решением сопряженной системы (6.7), которая соответствует решению $(u(t), x(t))$;

3) при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона - Понтрягина $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ как функция переменной u достигает своей верхней грани на множестве V при $u = u(t)$, то есть:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \text{ .(6.9)}$$

4) на левом и правом концах траектории $x(t)$ выполняются условия трансверсальности.

Рассмотрим условия трансверсальности на концах траектории $x(t)$.

1) Правый конец свободный: $S_I(t_1) \equiv E^n, t_1 \in R$.

Условия трансверсальности:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1), t_1) = 0, \qquad (6.24)$$

$$H(x(t_1), u(t_1), t_1, \psi(t_1), \psi_0) - \psi_0 \Phi_t(x(t_1), t_1) = 0. \qquad (6.42)$$

2) Правый конец подвижный.

Пусть множество $S_I(t_1)$ имеет вид (6.40), причем функции $g_{j_x}(x(t_1), t_1), g_{j_t}(x(t_1), t_1)$ не равны нулю одновременно для всех $j = \overline{1, s_I}$. Тогда условия трансверсальности означают:

существуют числа $a_1,\ldots,a_{s_I}$ такие, что

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1),t_1)=\sum_{j=1}^{s_I}a_j g_{j_x}(x(t_1),t_1) \qquad (6.27)$$

$$\begin{aligned}&a_j g_j(x(t_1),t_1)=0, a_j \ge 0,\ j=\overline{1,m_I},\\ &g_j(x(t_1))=0,\ j=\overline{m_I+1,s_I}.\end{aligned} \qquad (6.28)$$

$$\begin{aligned}&H(x(t_1),u(t_1),t_1,\psi(t_1),\psi_0)-\psi_0\Phi_t(x(t_1),t_1)=\\ &=-\sum_{j=1}^{s_I}a_j g_{j_t}(x(t_1),t_1).\end{aligned} \qquad (6.43)$$

3) Правый конец закреплен.

Условия трансверсальности:

$$x(t_1)=x_I, (6.29)$$

$$H(x_I,u(t_1),t_1,\psi(t_1),\psi_0)-\psi_0\Phi_t(x(t_I),t_1)=0. \qquad (6.44)$$

Левый конец траектории.

1) Левый конец траектории свободен: $S_0 \equiv E^n, t_0 \in R$.

Условия трансверсальности:

$$\psi(t_0)=0, \qquad (6.30)$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=0. \qquad (6.45)$$

2) Левый конец подвижный.

В случае, когда множество $S_0(t_0)$ имеет вид (6.41), причем функции $h_{j_x}(x(t_0),t_0), h_{j_t}(x(t_0),t_0)$ не равны нулю одновременно для всех $j=\overline{1,s_0}$, то условия трансверсальности означают: существуют числа $b_1,\ldots,b_{s_0}$ такие, что

$$\psi(t_0)=-\sum_{j=1}^{s_0}b_j h_{j_x}(x(t_0),t_0), \qquad (6.33)$$

$$\begin{aligned}&b_j h_j(x(t_0),t_0)=0,\ b_j \ge 0,\ j=\overline{1,m_0},\\ &h_j(x(t_0),t_0)=0,\ j=\overline{m_0+1,s_0}.\end{aligned} \qquad (6.34)$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_t}(x(t_0),t_0). \qquad (6.46)$$

1) Левый конец закреплен.

Условия трансверсальности:

$$x(t_0)=x_0, \qquad (6.35)$$

$$H(x_0,u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=0. \qquad (6.47)$$

Таким образом, наличие в задаче неизвестных моментов времени t_0,t_1 привели к появлению дополнительных условий (6.42) – (6.47), из которых находится время t_0,t_1.

6.4. Принцип максимума для решения задачи быстродействия линейной системы

Для системы управления

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{cases}$$

с закрепленными концами траекторий

$$\begin{cases}x_1(t_0)=x_{10}\\ x_2(t_0)=x_{20}\end{cases}, \begin{cases}x_1(t_1)=0\\ x_2(t_1)=0\end{cases},$$

и при условии ограничения на управление $|u(t)|\le 1$ найти управления и траектории, которые минимизируют время движения системы с заданной начальной точки в начало координат.

В данной задаче критерий оптимальности будет выглядеть

$$T=\int_{t_0}^{t_1} dt=t_1-t_0\to\min.$$

Решение. Применяем принцип максимума Понтрягина.

Строим функцию Гамильтона-Понтрягина (сразу полагаем $\psi_0=-1$)

$$H(x(t),u(t),t,\psi(t))=\psi_1(t)x_2(t)+\psi_2(t)u(t)-1.$$

Записываем сопряженную систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = -\dfrac{dH(x(t),u(t),t,\psi(t))}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\dfrac{dH(x(t),u(t),t,\psi(t))}{dx_2} = -\psi_1(t) \end{cases}.$$

Ищем управления $u^0(t)$, при котором функция Гамильтона-Понтрягина $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ достигает максимума: $\max\limits_u H(x(t),u,t,\psi(t))$. Заметим, что в данной задаче функция $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ линейная по управлению $u(t)$ на замкнутом интервале $|u(t)| \le 1$, а значит, может достигать своего максимума на концах отрезка.

Если $\psi_2(t) > 0$, то функция $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ возрастает с ростом $u(t)$, поэтому ее максимум достигается на правом конце отрезка, то есть $u^0 = 1$. Аналогично, при $\psi_2(t) < 0$ получаем $u^0 = -1$. Если $\psi_2(t) = 0$ то $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ от $u(t)$ не зависит и его можно положить произвольным с допустимой области, в частности: $u^0 = 0$.

Значит оптимальное управление будет иметь вид: $u^0 = sign\psi_2(t)$ для $\psi_2(t) \ne 0$.

Находим $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ как решение сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Получим

$$\psi_1(t) = C_1$$
$$\psi_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Таким образом, оптимальное управление определяется по формуле: $u^0 = sign(-C_1 t + C_2)$.

Поскольку найденная функция $\psi_2(t)$ линейная, то она может менять свой знак на любом замкнутом интервале не более чем в одной точке. Значит, управление $u^0(t)$ будет меняться з *+1* на *–1* (или с *–1* на *+1*) тоже не более чем в одной точке на интервале $[t_0, t_1]$. Эту точку называют <u>точкой переключения</u>.

Таким образом, независимо от выбора начальной точки x_0, $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, соответствующее оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, которая принимает значение *+1* или *–1* и имеет не более двух интервалов постоянства.

Рассмотрим возможные случаи.

а) $u^0 = 1$. Исходная система управления приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Найдем отсюда $x_1(t)$ как функцию от $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = x_2 \Rightarrow dx_1(t) = x_2 dx_2(t).$$

Отсюда имеем:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом получили семью парабол. Среди них есть только одна, проходящей через начало координат. В этом случае постоянная величина $C = 0$. Пусть начальная точка x_0 траектории лежит на этой параболе. Тогда система попадает в начало координат под действием только управления $u^0 = 1$.

Найдем время движения системы с учетом того, что $dx_2(t) = dt$. Для этого проинтегрируем второе уравнение:

$$T=\int_{t_0}^{t_1}dt=\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)}dx_2(t)=x_2(t_1)-x_2(t_0)=-x_2(t_0)=-x_{20}.$$

б) $u^0=-1$ Тогда система управления принимает вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-1\end{cases}.$$

Найдем, как и выше, зависимость $x_1(t)$ от $x_2(t)$:

$$dx_2(t)=-dt\Rightarrow\frac{dx_1(t)}{dx_2(t)}=-x_2\Rightarrow dx_1(t)=-x_2dx_2(t).$$

Отсюда имеем:

$$x_1(t)=-\frac{1}{2}x_2^2(t)+D,$$

где D – постоянная интегрирования.

Аналогично получили семью парабол, среди которых есть только одна, проходящей через начало координат в случае, когда $D=0$. Пусть начальная точка x_0 траектории выбрана на этой параболе. Тогда система попадает в начало координат под действием только управления $u^0=-1$.

Найдем время движения системы:

$$T=-\int_{t_0}^{t_1}dt=-\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)}dx_2(t)=-x_2(t_1)+x_2(t_0)=x_2(t_0)=x_{20}.$$

Обозначим дуги, по которым система может попасть в начало коодинат, через L_1 і L_{-1} для управлений $u^0=1$ і $u^0=-1$ соответственно (рис. 6.1.). Очевидно, что при $x_0\in L_1$ оптимальная траектория является частью дуги L_1, а в случае $x_0 \in L_{-1}$ – частью дуги L_{-1}. Направление движения по кривым – до начала координат.

Кривая $L_{-1}L_1$ называется линией переключения. Линия переключения $L_{-1}L_1$ разделяет всю фазовую плоскость на две части: $X_{-1}X_1$.

в) Пусть оптимальное управление меняется с $u^0 = -1$ на $u^0 = 1$ Для этого случая начальная точка будет принадлежать части X_{-1} фазовой плоскости: $x_0 \in X_{-1}$ (см. рис. 6.1). Тогда траектория движения системы состоит из двух частей: от x_0 до точки B под действием управления $u^0 = -1$ и от точки B до начала координат под действием управления $u^0 = 1$.

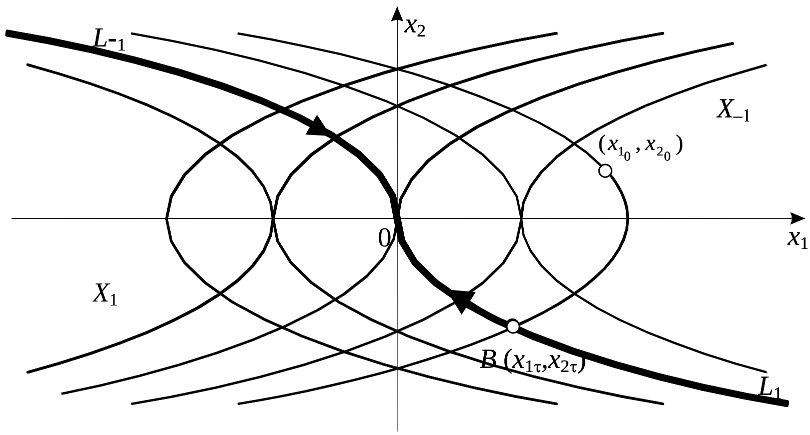

Рис. 6.1. Трактории движения системы при решении задачи быстродействия

Движение от начальной точки x_0 до точки B будет проходить по параболе: $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D$. Найдем постоянную D при условии, что данная парабола проходит через точку $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$. Имеем

$$x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2 + D \Rightarrow D = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 .$$

От точки B до начала координат система будет двигаться под действием управления $u^0 = 1$ по части L_1 линии переключения $L_{-1}L_1$. В этом случае постоянная величина $C = 0$.

Найдем координаты $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$ точки B как точки пересечения двух парабол:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} x_{1\tau} &= \frac{1}{2}(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2) \\ x_{2\tau} &= -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} \end{aligned}.$$

Найдем теперь время движения системы управления с начальной точки x_0 в начало координат. Он будет состоять из времени движения из точки x_0 в точку B и со времени движения из точки B в начало координат. Обозначим момент времени, в который система попадает в точку B, через τ. Тогда общее время движения системы будет равняться: $(\tau - t_0) + (t_1 - \tau)$.

Найдем время движения системы с точки x_0 в точку B под действием управления $u^0 = -1$.

$$\int_{t_0}^{\tau} dt = \tau - t_0 = -\int_{x_2(t_0)}^{x_2(\tau)} dx_2(t) = x_{20} - x_{2\tau}.$$

Время движения системы от точки B в начало координат по части L_1 линии переключения $L_{-1}L_1$ под действием управления $u^0 = 1$ будет:

$$t_1 - \tau = -x_{2\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}$$

Итак, общее время движения системы из точки x_0 в начало координат для случая, когда управление сначала есть, а потом в точке B переключается на $u^0 = 1$, будет

$$T = (\tau - t_0) + (t_1 - \tau) = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}\ .$$

г) Пусть оптимальное управление меняется с $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$. Для этого случая начальная точка будет принадлежать части X_1 фазовой плоскости: $x_0 \in X_1$. Тогда траектория движения системы состоит из двух частей: от точки x_0 – под действием управления $u^0 = 1$ – к точке переключения, и далее по дуге L_{-1} линии переключения – под действием управления $u^0 = -1$ – до начала координат.

Выполнив аналогичные пункта в) действия и преобразования, найдем время движения системы в этом случае:

$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}\ .$$

Таким образом, из рассмотренных случаев следует, что минимальное время перевода системы с заданной точки x_0 в начало координат определяется только координатами начальной точки траектории:

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} + x_{20}, \quad x_0 \in X_{-1},$$

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}} - x_{20}, \quad x_0 \in X_1.$$

Отметим, что для линейных систем управления принцип максимума для задачи быстродействия является необходимым и достаточным условиями оптимальности [4]. Итак, найденные управления и траектория являются оптимальными.

6.5. О способах решения краевых задач принципа максимума

Для численного решения краевой задачи принципа максимума могут быть использованы известные численные методы, такие как метод стрельбы, метод прогонки, различные итерационные методы.

Краевая задача принципа максимума (см., например, задачи (6.12), (6.11), (6.3), (6.14)) имеет ряд специфических особенностей, которые затрудняют применение стандартных методов решения краевых задач. Рассмотрим некоторые из особенностей.

1) Функция $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$, которая определяется из условия максимума, вообще говоря, нелинейно зависит от своих аргументов. Поэтому дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}, \qquad (6.11)$$

входящие в краевую задачи, также будут нелинейными, даже тогда, когда система управления $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ линейная относительно $x(t), u(t)$.

2) Функция $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ может быть не везде дифференцированной и даже разрывной (напр., $u = sign \psi$ в задаче оптимального быстродействия для линейных систем). В результате могут нарушаться, в частности, определенные аналитические свойства правых частей системы уравнений, входящих в краевую задачу.

3) Краевая задача принципа максимума осложняется в тех случаях, когда из условия $\sup\limits_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ функция $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ определяется неоднозначно.

Эти и другие обстоятельства затрудняют исследование проблем существования, единственности, устойчивости решения краевой задачи принципа максимума, сходимости применяемых численных методов. При численном решении прикладных задач оптимального управления указанные проблемы преодолеваются, как правило, путем учета специфики конкретной задачи и ее физического смысла.

6.6. Связь между методом принципа максимума и классическим вариационным исчислением

Рассмотрим основную задачу вариационного исчисления: среди непрерывных функций $x = x(t), t_0 \le t \le t_1$, имеющих кусочно-непрерывные производные $\dot{x}(t)$ и удовлетворяющих условиям $x(t_0) \in S_0$, $x(t_1) \in S_I$ найти такую, на которой функционал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

достигает экстремума (минимального значения), где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, S_0, S_1 – заданные множества из E^n.

Для простоты ограничимся случаем:

левый конец траекторий закрепленный: $x(t_0) = x_0, t_0$ – заданный;

правый конец $x(t_1)$ или закрепленный: $x(t_1) = x_I, t_1$ – заданный, или свободный: $S_I \equiv E^n, t_1$ – заданный, или подвижный и лежит на заданной гладкой кривой:

$$S_I = S_I(t_1) = \{x \in E^n : g(x, t_1) = x - \phi(t_1) = 0$$
$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\}.$$

Обозначим $\dot{x}(t) = u(t)$ и запишем задачу в эквивалентном виде как задачу оптимального управления:

$$Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \to \inf,$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$
$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) \in S_I(t_1).$$

Здесь $f^0(x(t), u(t), t)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные производные: $f_x^0(x(t), u(t), t)$, $f_u^0(x(t), u(t), t)$, $f_t^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ut}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ux}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{uu}^0(x(t), u(t), t)$ для всех $(x(t), u(t), t) \in E^n \times E^n \times [t_0, \infty)$

Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Согласно теореме 6.3 имеем:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u, \qquad (6.48)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-H_x(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t). \quad (6.49)$$

Для решения $(x(t),u(t))$, $t_0\le t\le t_1$ данной задачи оптимального управления должно выполняться необходимое условие:

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0), \qquad (6.50)$$

где $\psi(t)$ – решение системы (6.49) при $x=x(t,u(t)),u=u(t)$, $t_0\le t\le t_1$. Здесь $V=E^n$.

Условие (6.50) может выполняться только в стационарной точке, то есть

$$H_u(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi(t),\ \ t_0\le t\le t_1. \quad (6.51)$$

Отсюда: $\psi_0\ne 0$, иначе при $\psi_0=0$ з (6.51) получим $\psi(t)\equiv 0$, что противоречит условию (6.8) из теоремы 6.3. Значит, можно считать: $\psi_0=-1$.

Тогда соотношение (6.48) – (6.51) примет вид:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u, \quad (6.52)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t), \qquad (6.53)$$

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0), \qquad (6.54)$$

$$\psi(t)=f_u^0(x(t),u(t),t). \qquad (6.55)$$

Из уравнения (6.53): $\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0)$.

Отсюда, с учетом (6.55) следует, что

$$f_u^0(x(t),u(t),t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0). \qquad (6.56)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера в интегральной форме. Здесь $u(t)=\dot{x}(t),\ \ t_0\le t\le t_1$. Если (6.56) продифференцировать по t, то получим уравнение Эйлера-Лагранжа классического вариационного исчисления в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}(f_u^0(x(t),u(t),t)) - f_x^0(x(t),u(t),t)) = 0$$
$$u(t) = \dot{x}(t), \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Необходимым условием достижения функцией $H(x(t),u,t,\psi(t))$ максимума при $u = u(t)$ является неположительность квадратичной формы:

$$\sum_{i,j=1}^{n} H(x(t),u,t,\psi(t))\xi_i\xi_j \le 0$$

для произвольных $\xi_1,\ldots,\xi_n$, которые одновременно не равны нулю, $t_0 \le t \le t_1$.

Отсюда, учитывая выражение (6.51), получим:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{u_i u_j}^0(x(t),u,t)\xi_i\xi_j \ge 0, \ \ t_0 \le t \le t_1. \qquad (6.57)$$

Это необходимое условие Лежандра. В частности при n=1 имеем:

$$f_{uu}^0(x(t),u,t) \ge 0, \quad t_0 \le t \le t_1 .$$

Выведем теперь условие Вейерштрасса. Перепишем (6.54) с учетом (6.51), (6.55):

$$\begin{aligned} &0 \le H(x(t),u(t),t,\psi(t)) - H(x(t),v,t,\psi(t)) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v - u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned} \qquad (6.58)$$

для $\forall v \in E^n$ при условии, что $(x(t),u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, – решение исходной задачи.

Введем функцию:

$$\begin{aligned} &E(x(t),u(t),t,v) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v - u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned} . \qquad (6.59)$$

Это функция Вейерштрасса. Тогда известное условие Вейерштрасса:

$$E(x(t),u(t),t,v) \ge 0, \ \forall v \in E^n, \ \ t_0 \le t \le t_1$$

следует из неравенства (6.58).

Далее, из принципа максимума Понтрягина (теоремы 6.1 – 6.3) следует непрерывность сопряженных функций $\psi(t)$ и $H(x(t),u(t),t,\psi(t)) = \sup\limits_{u \in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t))$ на отрезке $[t_0,t_1]$.

Поэтому с учетом соотношений (6.51), (6.54), (6.55) имеем:

$$[f_u^0(x(t),u(t),t)]_t = 0,$$

$$[u^T(t) f_u^0(x(t),u(t),t) - f^0(x(t),u(t),t)]_t = 0, \qquad (6.60)$$

Здесь обозначено: $[z(t)]_t = z(t+0) - z(t-0)$.

Поскольку равенства (6.60) выполнены для всех $t:\ t_0 \le t \le t_1$, то они выполняются в том числе и в те моменты t, когда функция $x(t)$ может иметь излом, то есть когда производная $\dot{x}(t)$ имеет разрыв. Если учесть, что $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, то условия (6.60) переходят в известные условия Вейерштрасса - Эрдмана [33].

Рассмотрим условия на правом конце траектории $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Если этот конец свободен, то согласно условию трансверсальности (6.24) выполняется: $\psi(t_1) = 0$.

Тогда, согласно (6.55), имеем:

$$\psi(t_1) = f_u^0(x(t),u(t_1),t_1)0\,. \qquad (6.61)$$

Если правый конец подвижной, то есть

$$x(t_1) \in S_I(t_1) = \{x \in E^n : g_j(x,t_1) = x_j - \phi_j(t_1) = 0,\ j = \overline{1,n},$$

$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\}\,.$$

то согласно условиям трансверсальности (6.27), (6.43) существуют постоянные $a_1,\ldots,a_n$ такие, что

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_x}(x(t_1),t_1) = a_i, \qquad (6.27)$$

$$H(x(t_1),u(t_1),t_1,\psi(t_1)) = -\sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_t}(x(t_1),t_1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t_1) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_1)\varphi_j(t_1) = \psi^T(t_1)\varphi(t_1). \qquad (6.28)$$

Поскольку $H(x(t),u,t,\psi(t)) = -f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t)u$ и $\psi(t)$ выражается формулой (6.55), то из последнего равенства имеем:

$$f^0(x(t_1),u(t_1),t_1) + (f_u^0(x(t_1),u(t_1),t_1))^T(\varphi(t_1) - u(t_1)) = 0 . \quad (6.62)$$

Условия (6.61), (6.62), где $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, известны как условия трансверсальности для свободного и подвижного правого конца соответственно [33].

Таким образом, для $V \equiv E^n$ из принципа максимума следуют все основные необходимые условия экстремума, известные в классическом вариационном исчислении. Впрочем, если $V \neq E^n$, то соотношение (6.51) не выполняется, и условие Вейерштрасса тоже может не выполняться. Условие максимума является обобщением условия Вейерштрасса из вариационного исчисления. Преимущество условия максимума перед условием Вейерштрасса заключается в том, что оно может применяться для любого множества $V \subseteq E^n$, в частности, замкнутого, и для более общих задач. Случай замкнутой множества V является более важным для прикладных исследований, поскольку значение оптимальных управлений зачастую лежат на границе множества V.

6.7. Принцип максимума для дискретных систем

Рассмотрим дискретный управляемый процесс, описываемый системой уравнений вида

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)), k = \overline{0, N-1}, \quad (6.63)$$

$$x(0) = a . \quad (6.64)$$

Здесь $x(k) = (x_1(k),\ldots,x_n(k))^T$, $k = \overline{0,N}$ вектор-столбец из пространства E^n, который определяет состояние процесса в момент k, текущие управления

$$u(k) = (u_1(k),\ldots,u_m(k))^T, u(k) \in G_k \subset E^m, k = \overline{0, N-1} . \quad (6.65)$$

G_k – некоторое множество, которое зависит от k, вектор-функция $f_k = f_k(x(k),u(k)) = (f_k^1,\ldots,f_k^n)^T$, $k = \overline{0,N}$ определены на $E^n \times G_k$, a – заданный вектор, число N – фиксировано.

Обозначим набор $x = \{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$, который будем называть фазовой траекторией процесса, а набор $u = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ – управлением процесса.

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: найти такое управление u и фазовую траекторию x, которые удовлетворяют системе уравнений (6.63), начальному условию (6.64), ограничениям (6.65) и минимизируют функционал

$$Q(x,u) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(x(k), u(k)) + f_N^0(x(N)), \tag{6.66}$$

где $f_k^0(x(k), u(k))$, $k = \overline{0, N}$ – скалярные функции.

Управление и траекторию, которые являются решением задачи (6.63) – (6.66), обозначим $\tilde{u}$ и $\tilde{x}$, и будем называть оптимальным управлением и оптимальной фазовой траектории соответственно.

Введем функцию Гамильтона:

$$H_k(\psi(k+1), x(k), u(k)) = \sum_{k=0}^{n} \psi_{k+1}^i f_k^i(x(k), u(k)) - f_k^0(x(k), u(k)) =$$

$$= \psi^T(k+1) f_k(x(k), u(k)) - f_k^0(x(k), u(k)),$$

где функции $\psi(k)$ такие, что

$$\begin{aligned} \psi(k) &= -\frac{\partial f_k^0}{\partial x(k)} + \psi(k+1) \frac{\partial f_k}{\partial x(k)} = \\ &= \frac{\partial H(\psi(k+1), x(k), u(k))}{\partial x(k)}, k = \overline{N-1, 0} \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\psi(N = -\frac{\partial f_N^0}{\partial x(N)}. \tag{6.68}$$

Теорема 6.4. (Дискретный принцип максимума). Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ – соответственно оптимальные фазовая траектория и управление для задачи (6.63) – (6.66), $\tilde{\psi}(1), \dots, \tilde{\psi}(N)$ – решение уравнений (6.67), (6.68) при $x = \tilde{x}$, $u = \tilde{u}$.

Пусть

1) f_k^0, $k = \overline{0, N}$, f_k, $k = \overline{0, N-1}$ – непрерывно-дифференцированные по своим аргументам.

Также для всех $k=\overline{0,N-1}$ выполняются ограничения:

2) f_k^0 – выпуклые по $u(k)$;

3) f_k – линейные по $u(k)$;

4) G_k – выпуклые замкнутые множества, имеющие внутренние точки.

Тогда для произвольных $k=\overline{0,N-1}$ гамильтониан $H_k(\widetilde{\psi}(k+1),\widetilde{x}(k),u(k))$ достигает своего максимума по $u(k)\in G_k$ в точке $\widetilde{u}(k)$.

Замечание 6.1. Если в задаче (6.63) – (6.66) функции f_k^0 выпуклые, а f_k линейные не только по управлением, но и по фазовым переменным $x(k)$, о условия теоремы 6.4 будут и достаточными [7].

Замечание 6.2. Функция Гамильтона H_k вдоль оптимальной траектории отличается от своего максимального значения на величину порядка $O(h)$, где h – шаг разностной схемы. Чем меньше шаг разностной схемы, тем точнее выполняется дискретный принцип максимума. Если же дискретная система не связана с разностной аппроксимацией непрерывных процессов, то принцип максимума, вообще говоря, может не выполняться.

Зауваження 6.3. В дискретных задачах оптимального управления $\widetilde{u}(k)$ при каждом k, $k=\overline{0,N-1}$ всегда являются стационарными точками функции Гамильтона H_k, то есть

$$\left.\frac{\partial H_k}{\partial u(k)}\right|_{\widetilde{u}(k)=u(k)}=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.
18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.
19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.
20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.
21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.
22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.
23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.
24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.
25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.
26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.
27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.
28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.
29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.
30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.
31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.
32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.
33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.